Exercice 1
On considère la formule de quadrature suivante :

$$I(f) = \frac{1}{9}[5f(-1) + 16f(\omega) - 3f(1)]$$

pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, où $\omega \in (-1, 1)$.

1. Rappeler la définition de degré d'exactitude r d'une formule de quadrature, puis déterminer la valeur de ω telle que le degré d'exactitude de la formule $I(f)$ donnée soit $r = 2$.
2. On veut intégrer la fonction $f(x) = e^{x^2}$ sur l'intervalle [0,1]. Pour cela, on divise l'intervalle [0,1] en M sous-intervalles $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ de la même longueur $H = x_k - x_{k_1} = 1/M$, $k = 1, \ldots, M$, avec $x_0 = 0$ et $x_M = 1$, et on considère la formule composite du point milieu (rectangle) $I^c_{pm}(f)$. Soit $I_{pm,(k)}(f)$ la formule simple du point milieu (rectangle) sur le sous-intervalle I_k. En sachant que l'erreur commise sur chaque intervalle est :

$$E^{pm}_{(k)} = \left| \int_{I_k} f(x)dx - I_{pm,(k)}(f) \right| \leq \frac{H^3}{24} \max_{\xi \in I_k} |f''(\xi)| \quad \text{si } f \in C^2,$$

calculer l'erreur globale $E^c_{pm} = |I(f) - I^c_{pm}(f)|$ introduite par la formule composite du point milieu $I^c_{pm}(f) = \sum_{k=1}^{M} I_{pm,(k)}(f)$ sur l'intervalle [0,1]. Trouver le nombre minimal M de sous-intervalles afin que $E^c_{pm} \leq 10^{-2}$.
3. On a appliqué deux autres formules de quadrature composites $I^c_a(f)$ et $I^c_b(f)$ pour approcher l'intégrale $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ en supposant que $f \in C^\infty([-1, 1])$.
Le tableau suivant montre l'erreur commise pour différentes valeurs de la longueur H des sous-intervalles :

H	erreur $I^c_a(f)$	erreur $I^c_b(f)$
1.00	1.547	8.410e–03
0.10	1.580e–02	8.125e–07
0.01	1.580e–04	8.121e–11

Déduire de façon approximative l'*ordre de convergence* des deux formules $I^c_a(f)$ et $I^c_b(f)$. Quelles formules que vous connaissez pourraient donner les valeurs du tableau ?

Exercice 2

On considère le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = 2e^{-y(t)} & 0 \leq t \leq 10, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

On note par u_n l'approximation de $y(t_n)$ au temps $t_n = nh$, h étant le pas de discretisation.

1. Ecrire les schémas d'Euler progressif, d'Euler rétrograde et de Heun pour résoudre numériquement le problème donné.
2. En sachant que la solution exacte est $y(t) = \ln(e^2 + 2t)$, trouver les valeurs de h qui garantissent la stabilité du schéma d'Euler progressif.
3. En général, quel est l'ordre de convergence de la méthode de Heun ? Est-ce que cette méthode est stable ? Calculer l'approximation u_1 qu'on trouve par cette méthode.
4. Réécrire la méthode d'Euler rétrograde sous la forme

$$u_{n+1} = \phi(u_{n+1}), \qquad \forall n \geq 0,$$

   où ϕ est une fonction convenable qui dépend aussi de u_n et de h. Montrer que la suite $\{u_n\}$ est croissante.
5. Afin de trouver l'inconnue u_{n+1} (étant donnés u_n et h), utiliser des itérations de point fixe avec ϕ comme fonction d'itération. Etablir une condition sur h suffisante à garantir que cette méthode de point fixe converge.

Exercice 3

On considère l'équation non-linéaire $f(x) = 0$, où $f(x) = e^{-x} - x^2$.

a) Montrer qu'il existe un seul zéro α de f dans $[0, 1]$ et que la méthode de dichotomie (bissection) peut être utilisée afin de le calculer.

b) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de bissection nécessaire pour approximer α avec une tolérance de 10^{-10}.

c) Ecrire la méthode de point fixe définie par la fonction d'itération suivante :

$$\phi(x) = x + \frac{1}{4}\left(e^{-x} - x^2\right), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

et montrer sa convergence vers la solution α.

d) Trouver le nombre d'itérations de la méthode de point fixe nécessaire pour calculer une solution approchée avec une tolérance de 10^{-10}.

Exercice 4

On considère le système linéaire

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{où} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & \theta & 0 \\ \theta^2 & 4 & \theta \\ 0 & \theta^2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \theta \geq 0. \tag{4}$$

a) Ecrire la matrice d'itération de la méthode de Jacobi appliquée au système (4) et déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur $\theta \geq 0$ afin que la méthode soit convergente.

b) Répondre à la même question pour la méthode de Gauss-Seidel.

c) Est-ce que la méthode de Gauss-Seidel converge pour un ensemble de valeurs de θ plus grand que la méthode de Jacobi ? Si le deux méthodes convergent, quelle est la méthode qui requiert moins d'itérations ?

Plus une preuve
Plus une fonction en Python

ODE

$$-\lambda_{max} \leq \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) \leq -\lambda_{min}$$

$$h < \frac{2}{\max_{j=1,\dots,p} |\lambda_j|} = \frac{2}{\rho(A)} \,,$$

$$\forall n = 0, \dots, N_h \quad |u_n - y(t_n)| \leq C(h)$$

$$|y(t_n) - u_n| \leq \frac{e^{Lt_n} - 1}{2L} \max_{t\in[0,T]} |y''(t)|\, h,$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1},u_{n+1})\right]$$

$$... = \frac{h}{2}\left[f(t_n,u_n) + f(t_{n+1}, u_n + hf(t_n,u_n))\right]$$

Linear Systems

$$B = P^{-1}(P - A) = I - P^{-1}A \quad , \quad \mathbf{g} = P^{-1}\mathbf{b}.$$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \alpha_{opt} = \frac{2}{\lambda_{min}(P^{-1}A) + \lambda_{max}(P^{-1}A)}$$

$$\begin{aligned}
P\mathbf{z}^{(k)} &= \mathbf{r}^{(k)}\\
\alpha_k &= \frac{(\mathbf{z}^{(k)})^T\mathbf{r}^{(k)}}{(\mathbf{z}^{(k)})^T A\mathbf{z}^{(k)}}\\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}\\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \left(\frac{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) - 1}{\mathrm{Cond}(P^{-1}A) + 1}\right)^k \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A$$

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{{\mathbf{p}^{(k)}}^T\mathbf{r}^{(k)}}{{\mathbf{p}^{(k)}}^T A\mathbf{p}^{(k)}}\\
\mathbf{x}^{(k+1)} &= \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}\\
\mathbf{r}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{p}^{(k)}\\
P\mathbf{z}^{(k+1)} &= \mathbf{r}^{(k+1)}\\
\beta_k &= \frac{(A\mathbf{p}^{(k)})^T\mathbf{z}^{(k+1)}}{(A\mathbf{p}^{(k)})^T\mathbf{p}^{(k)}}\\
\mathbf{p}^{(k+1)} &= \mathbf{z}^{(k+1)} - \beta_k \mathbf{p}^{(k)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|_A \leq \frac{2c^k}{1 + c^{2k}} \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}\|_A \,, \quad c = \frac{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} - 1}{\sqrt{K_2(P^{-1}A)} + 1}$$

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \mathrm{Cond}\,(P^{-1}A)\frac{\|P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|P^{-1}\mathbf{b}\|}$$

Interpolation

$$\varphi_k(x) = \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}.$$

$$\max_{x\in I} |E_n f(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)} (h)^{n+1} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|,$$

$$\max_{x\in I} \mid E_1^H f(x) \mid \leq \frac{H^2}{4} \max_{x\in I} |f''(x)|.$$

$$\max_{x\in I} \mid E_n^H f(x) \mid \leq \frac{H^{n+1}}{2(n+1)} \max_{x\in I} |f^{(n+1)}(x)|\,.$$